Методы и модели оценки эффективности управления производственно – финансовой деятельностью в промышленной логистике

Methods and models for evaluating the effectiveness of management of production and financial activities in the industrial logistics

АПАЛЬКОВА Т.Г.
к.э.н., доцент
Кафедра управленческого и финансового учета
Московский государственный машиностроительный университет
(Россия, Москва)

APALKOVA T.G.
Candidate of Economic Sciences, Associate Professor
Department of administrative and financial account
Moscow State University Of Mechanical Engineering (Moscow, Russia)

МИЩЕНКО А.В.
д.э.н., профессор
Кафедра логистики
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
(Россия, Москва)

MISHCHENKO A.V.
Doctor of Economics, Professor
Department of Logistics
National Research University Higher School of Economics (Moscow, Russia)

Ключевые слова: *управление производственно-финансовой деятельностью, анализ рисков, промышленная логистика, оценка эффективности*
Keywords: *the management of production and financial activity, risk analysis, industrial logistics, evaluation*

АННОТАЦИЯ

Задача повышения эффективности управления производственно-финансовой деятельностью наиболее актуальна сегодня для отечественных предприятий реального сектора экономики, которым необходимо в ближайшие годы решить задачу импортозамещения по ряду позиций продукции, ранее импортируемой из Евросоюза и США. В статье представлены различные варианты постановки задачи оптимизации производственной программы предприятия в условиях ограниченности материальных и финансовых ресурсов. Рассматриваются динамическая и статическая постановки, а также модель, учитывающая неопределенность состояний внешней среды. Статические модели относятся к классам задач линейного и нелинейного программирования. Динамическая модель представляет собой задачу оптимального управления, для которой, в силу сложности процедуры решения, предложен метод получения приближенного решения, основанный на аппроксимации подынтегрального выражения. Факторы неопределенности учтены в двух моделях: в одной предполагается, что априори неизвестны цены на готовую продукцию, в другой – оптимальность решения зависит от заранее неизвестной величины инфляции. В работе приведен пример реализации одной из моделей для практического решения задачи оптимизации производственной программы предприятия пищевой промышленности. Показано, что решение позволяет не только определить оптимальные объемы выпуска готовой продукции для мультиноменклатурного производства, но и обосновать заключение о необходимости привлечения кредита и аренды.

ABSTRACT

The task of increasing the efficiency of production and financial activities is more relevant today for domestic enterprises of the real sector of the economy, which is necessary in the coming years to solve the problem of import substitution on a number of items of products, previously imported from the European Union and the United States. The paper presents various options for setting the problem of optimizing the enterprise production program with limited material and financial resources. The dynamic and static performances, as well as a model that takes into account the uncertainty of the state of the environment. Static models belong to the class of linear and nonlinear programming. The dynamic model is the optimal control problem for which, due to the complexity of the decision procedures, proposed a method of obtaining an approximate solution based on the approximation of the integrand. Uncertainties taken into account in two models: one assumes that a priori unknown prices for finished products, the other – the best solution depends on the advance of the unknown quantity of inflation. An example of one of the models implementation for the practical solution of the problem of production program optimization of the food industry is given in the article. It is shown that the solution can not only determine the optimum amounts of the finished product for multi nomenclature production, but also to justify the conclusion about the need to attract credit and leasing.

В период сокращения доступа к финансовым, материальным и информационным ресурсам западных стран становится актуальной задача повышения эффективности управления производственно-финансовой деятельностью отечественных предприятий.

Это, в первую очередь, относится к предприятиям реального сектора экономики, которые должны в ближайшие годы решить задачу импортозамещения по ряду позиций продукции, ранее импортируемой из Евросоюза и США.

В предлагаемой работе рассмотрены модели управления ограниченными материальными и финансовыми ресурсами предприятия при заданных объемах выпуска производимой продукции

Ниже будут рассмотрены как детерминированные модели, так и ситуации, связанные с учетом неопределенности и риска.

Модель управления производственно-финансовой деятельностью предприятия с учетом ограничений на объем склада

Рассмотрим задачу определения оптимальной производственной программы предприятия с учетом ограничений на производственные мощности, а также ограничений на объемы комплектующих, емкость склада и существующий спрос по каждому виду продукции.

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i \to \max \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} \cdot x_i \leq k_l \cdot \tau_l, \; l = 1, 2, \ldots, K \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot x_i \leq V \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} \cdot x_i \leq W_j, \; j = 1, 2, \ldots, M \qquad (4)$$

$$x_i \leq Pt_i, \; x_i \in Z^{+} \qquad (5)$$

В модели (1) – (5) использованы следующие обозначения:

c_i – маржинальный доход (прибыль) предприятия, получаемый от реализации одной единицы продукции вида i (i = 1,2,…n);

t_{il} – время, в течение которого задействовано оборудование вида l при выпуске одной единицы продукции вида i (l = 1,2,…K);

k_l – число единиц оборудования вида l, участвующих в производственном процессе;

τ_l – время, в течение которого может быть задействовано оборудование вида 1 в производственном процессе на интервале времени (0,T). Это время еще называют эффективным временем оборудования вида 1 (1 = 1, 2,. .., K);

l_{ij} – количество комплектующих вида j, которые необходимы для производства одной единицы продукции вида i (j = 1, 2, …, M);

v_i – площадь, занимаемая одной единицей вида i на складе;

V – емкость склада;

x_i – количество единиц продукции вида i, выпускаемое предприятием на интервале времени (0,T), i = 1,2, …, n;

W_j – количество комплектующих вида j, которое есть на предприятии;

Pt_i – спрос на продукцию вида i на интервале времени (0;T).

Таким образом, критерием модели (1) – (5) является оптимизация прибыли (1) при ограничениях на производственные мощности (2), емкость склада (3), объем комплектующих (4) и спрос на каждый вид продукции (5). Впервые данная модель была представлена в работе [1].

Модель управления оборотным капиталом сборочного производства (закупка комплектующих)

В модели, предлагаемой ниже, предполагается использовать не только имеющиеся запасы комплектующих, но и пополнять их за счет дополнительных закупок.

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i \to \max \qquad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} \cdot x_i \leq k_l \cdot \tau_l \qquad (7)$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot x_i \leq V \qquad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} \cdot x_i \le W_j + z_j \quad (9)$$

В формуле (9) z_j задает дополнительное количество комплектующих вида j, закупаемых с использованием оборотных средств предприятия в объеме F.

$$\sum_{j=1}^{M} z_j \cdot \beta_i \le F \quad (10)$$

z_j – объем закупаемых комплектующих вида j;
β_i – цена комплектующих вида j.

Соотношение (10) задает ограничение на объем финансовых средств, используемых при закупке комплектующих.

$$x_i \le Pt_i,\ x_i \in Z^+,\ j=1,2,\ldots,M,\ i=1,2,\ldots,n \quad (11)$$

Таким образом, оптимальным решением задачи (6) – (11) является не только целочисленный вектор $x = (x_1, \ldots x_n)$, задающий объемы выпуска конечной продукции, но и вектор $z = (z_l,\ldots, z_M)$, определяющий количество закупаемых комплектующих каждого вида.

Модель управления оборотным капиталом сборочного производства с учетом плавающих цен на конечную продукцию

В рассматриваемой ниже модели предполагается, что цены на конечную продукцию могут меняться в диапазоне $a^1_i \le a_i \le a^2_i$, i = 1,2,..n.

В этом случае в модели (6)-(11) видоизменяется целевая функция (6) и граничное условие (11), а также – появляется дополнительное условие (7.10):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i - \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot x_i \to \max \quad (6.10)$$

$$a^1_i \le a_i \le a^2_i,\ i = 1,2,..n \quad (7.10)$$

$$x_i \le Pt_i - \Delta_i \cdot (a_i - a^1_i) \quad (11.10)$$

Δ_i – коэффициент пропорциональности падения спроса на продукцию вида i.

Таким образом, модель оптимизации закупок комплектующих с учетом переменных цен на конечную продукцию будет иметь следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i - \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot x_i \to \max \quad (6.11)$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} \cdot x_i \le k_l \cdot \tau_l, \quad (7.11)$$

$$a^1_i \le a_i \le a^2_i,\ i = 1,2,..n \quad (8.11)$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} \cdot x_i \le W_j + z_j \quad (9.11)$$

$$\sum_{j=1}^{M} z_j \cdot \beta_i \le F \quad (10.11)$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot x_i \le V \quad (10.12)$$

$$x_i \le Pt_i - \Delta_i \cdot (a_i - a^1_i) \quad (11.11)$$

$$x_i \le Pt_i,\ x_i \in Z^+,\ j=1,2,\ldots,M,\ i=1,2,\ldots,n \quad (12.11)$$

Здесь Pt_i спрос на продукцию вида i при цене a^1_i.

Задача (6.11) –(12.11) является нелинейной, поскольку a_i является переменной. Таким образом, решение задачи (6.11) –(12.11) есть три вектора

$x=(x_1,\ldots,x_n)$ – задает производственную программу (ПП);

$z=(z_1,\ldots,z_M)$ – задает объем закупки комплектующих
$a=(a_1,\ldots,a_n)$ – задает цены на конечную продукцию.

Модель управления оборотным капиталом сборочного производства с учетом возможности дополнительной аренды склада

Ниже будет представлена модель оптимизации закупки комплектующих сборочного производства с учетом нефиксированных цен на конечную продукцию и возможности дополнительной аренды складских помещений.

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i - \sum\nolimits_{i=1}^{n} b_i \cdot x_i - d \cdot y \to \max \tag{12}$$

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} t_{il} \cdot x_i \le k_l \cdot \tau_l,\ l = 1,2,\ldots,K \tag{13}$$

$$a_i^1 \le a_i \le a_i^2,\ i = 1,2,\ldots,n \tag{14}$$

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} v_i \cdot x_i \le V + y \tag{15}$$

Здесь d – цена дополнительной длительной аренды одного м^2 склада; y – количество дополнительно арендуемых м^2.

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} t_{il} \cdot x_i \le W_j + z_j,\ j = 1,2,\ldots,M \tag{16}$$

$$\sum\nolimits_{j=1}^{M} z_j \cdot \beta_i + d \cdot y \le F \tag{17}$$

$$x_i \le Pt_i - \Delta_i \cdot (a_i - a_i^1) \tag{18}$$

Pt_i – спрос при минимальной цене на продукцию вида i, Δ_i – коэффициент падения спроса на продукцию вида i при повышении цены.

В модели (12) – (18) может быть предусмотрена возможность учета оттока конечной продукции со склада на периоде (0,T). В этом случае ограничение (15) на емкость склада видоизменяется следующим образом:

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} v_i \cdot x_i \le V + y + \sum\nolimits_{i=1}^{n} v_i \cdot x_i \cdot \theta_i \tag{15.1}$$

Здесь $0 \le \theta \le 1$, коэффициент, характеризующий отток продукции на периоде (0;T).

Модель управления закупками комплектующих сборочного производства с учетом заказа

Рассмотрим ситуацию, когда вместе с ограничением на спрос есть еще ограничение на заказ, то есть $x_i > zak_i$, i=1, 2,…,n.

В этом случае задача (1) – (5) не всегда имеет решение. Это, в частности, произойдет, если выполняется одно из трех соотношений или их комбинаций:

a. $\sum\nolimits_{i=1}^{n} t_{il} \cdot zak_i > k_l \cdot \tau_l,\ l = 1,2,\ldots,K$

b. $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i \cdot zak_i > V$

c. $\sum\nolimits_{i=1}^{n} l_{il} \cdot zak_i > W_j,\ j = 1,2,\ldots,M$

Отметим, что неравенство (c) должно выполняться хотя бы для одного вида комплектующих q ($1 \le q \le M$).

В этом случае для выполнения заказа должны быть осуществлены инвестиции либо в увеличение производственной мощности предприятия, либо в закупку дополнительных комплектующих. Минимальный объем инвестиций для выполнения заказа определяется в этом случае при решении следующей задачи:

$$d \cdot y + \sum_{l=1}^{k} y_l \cdot \gamma_l + \sum_{j=1}^{M} z_j \cdot P_j \to \max \tag{19}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} \cdot x_i \le (k_l + y_l) \cdot \tau_l,\ l = 1,2,\ldots,K \tag{20}$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot x_i \le V + y \tag{21}$$

Здесь d – цена дополнительной длительной аренды одного м^2 склада; y – количество дополнительно арендуемых м^2

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} \cdot x_i \le W_j + z_j,\ j = 1,2,\ldots,M \tag{22}$$

$$x_i \le Pt_i\ ,\ x_i \ge zak_i,\ x_i \in Z^+ \tag{23}$$

$$z_j \ge 0,\ y \ge 0,\ y_i \in Z^+\ i = 1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,M;\ l=1,2,\ldots,K \tag{24}$$

Модель оптимизации закупок комплектующих для сборочного производства с учетом дополнительного привлечения кредита

В модели (6) – (11) можно предположить, что кроме собственных оборотных средств в объеме F, можно привлечь еще и кредит в объеме F_{Kp} под процент α. Необходимо выяснить целесообразность привлечения кредита с точки зрения выбранного критерия. Для этого необходимо решить две оптимизационные задачи следующего вида:

Задача 1

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i \to \max \tag{6.15}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} \cdot x_i \le k_l \cdot \tau_l \tag{7.15}$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot x_i \le V \tag{8.15}$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} \cdot x_i \le W_j + z_j \tag{9.15}$$

$$\sum_{j=1}^{M} z_j \cdot \beta_i \le F \tag{10.15}$$

$$x_i \le Pt_i,\ x_i \in Z^+;\ j=1,2,\ldots,M;\ i = 1,2,\ldots,n;\ l=1,2,\ldots,K \tag{11.15}$$

Задача 2.

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i - \alpha \cdot \left(\sum_{j=1}^{M} z_j \cdot \beta_i - F\right) \to \max \tag{6.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} \cdot x_i \le k_l \cdot \tau_l \tag{7.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot x_i \le V \tag{8.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} \cdot x_i \le W_j + z_j \tag{9.2}$$

$$\sum_{j=1}^{M} z_j \cdot \beta_i > F \tag{10.2}$$

$$\sum_{j=1}^{M} z_j \cdot \beta_i \le F + F_{кр} \tag{10.3}$$

$$x_i \le Pt_i,\ x_i \in Z^+;\ j=1,2,\ldots,M;\ i=1,2,\ldots,n;\ l=1,2,\ldots,K \tag{11.2}$$

В задаче 1 не привлекается кредит, а в задаче 2 кредит привлекается в объеме не более, чем F_{Kp}. В итоге выбирается решение той задачи, у которой значение целевой функции ((6.15) или (6.2)) больше на оптимальных решениях задач 1 и 2.

В предлагаемых моделях также может быть предусмотрена возможность изменения цен на конечную продукцию. Кроме того, может быть сформулирована задача о максимизации процентной ставки по кредиту α, при котором целесообразно этот кредит привлекать для пополнения оборотных средств.

Многопериодная модель сборочного производства

Рассмотрим ситуацию планирования выпуска конечной продукции сборочного предприятия на более длительную перспективу (более одного года). В этом случае необходимо дисконтировать финансовые потоки, связанные с реализацией готовой продукции на различных периодах времени. Соответственно, целевая функция с учетом дисконтирования финансовых потоков будет задаваться по аналогии с (6) следующим образом:

$$\sum_{t=0}^{T} \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i^t \cdot x_i^t}{(1+k)^t} \to \max \qquad (24)$$

Где:
k_l – маржинальный доход от реализации продукции вида i на периоде времени с номером t;
T – число периодов времени;
x_i^t – объем выпуска продукции вида i на периоде времени t (t = 0, 1,2, ..., T)

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} \cdot x_i^t \le k_l \cdot \tau_l^t;\ t=0,\dots,T;\ l=1,2,\dots,K \qquad (25)$$

Где:
k_l – число единиц оборудования вида l, участвующих в сборочном процессе;
t_{il} – время, в течение которого задействовано оборудование вида l при выпуске одной единицы продукции вида i (l = 1,2,...K);
τ_l^t – эффективное время работы оборудования вида l на периоде времени t.

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot x_i^t \le V^t;\ t=0,\dots,T \qquad (26)$$

Где:
v_i – площадь, занимаемая одной единицей вида i на складе;
V^t – объем склада на периоде времени с номером t.

Для определения величины Vt можно использовать следующую формулу:

$$V^t = V - \sum_{t=0}^{T} \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot x_i^{\tau}$$

Где:
V – исходная емкость склада;
x_i^{τ} – количество конечной продукции вида i, которое было отправлено со склада на периоде времени τ(τ = 0, 1,2, ..., t-1)

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} \cdot x_i^t \le W_j^t + z_j^t \qquad (27)$$

Где:
W_j^t – количество комплектующих вида 1 которое есть на предприятии на периоде времени t;
z_j^t – количество комплектующих вида j, которое предприятие дополнительно закупает на периоде времени t;
l_{ij} – количество комплектующих вида j, которое необходимо при сборке одной единицы продукции вида i.

$$\sum_{j=1}^{M} z_j^t \cdot \beta_j^t \le F_t;\ t=0,1,\dots,T \qquad (28)$$

Где:

β_j^t – цена одной единицы комплектующих вида j на периоде времени t;
F_t – объем оборотных средств предприятия, направляемых на закупку комплектующих на периоде времени t.

$$x_i^t \leq Pt_j^t\,, x_i \in Z^+ \tag{29}$$

Где:
Pt_j^t – спрос на продукцию вида i на периоде времени t;
Z^+ – множество целых неотрицательных чисел.

Динамические модели управления производственно – финансовой деятельностью предприятия

Рассмотрим ситуацию, учитывающую динамику оттока и притока готовой продукции на склад. Будем полагать, что сборка всех видов готовой продукции осуществляется с использованием m видов производственных ресурсов, объем которых на предприятии задан вектором $c = (c_1 \dots c_T)$. Для обеспечения единичной производительности при сборке продукции вида i объем выделенных производственных ресурсов должен быть равен $a_i^0 = (a_{i1}^0, \dots, a_{im}^0)$ Если необходимо обеспечить производительность при выпуске продукции вида i в момент t, равную $q_i(t)$, то объем производственных ресурсов, выделяемых в этот момент, задается вектором $(q_i(t) \cdot a_{i1}^0, \dots, qi(t) \cdot a_{im}^0)$.

В этом случае динамическая оптимизационная модель определения производственной программы предприятия на временном интервале (0,T) определяется следующим образом:

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} \beta_i \cdot \int_0^T qi(t)dt \to \max \tag{30}$$

Где:
β_i – маржинальный доход от реализации одной единицы продукции вида i;
$q_i(t)$ – интенсивность выпуска продукции вида i.

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} q_i(t) \cdot a_{ij}^0 \leq c_j;\ j=1,\dots,m \tag{31}$$

Здесь (0; T) – интервал времени, для которого формируется производственная программа.

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} v_i \cdot \int_0^t qi(t')dt' \leq V + \sum\nolimits_{i=1}^{n} v_i \cdot \int_0^t u_i(t')dt'\ t \in (0;\ T);\ i=1,2\dots,n \tag{32}$$

Где:
V – емкость склада;
$u_i(t)$ – интенсивность, оттока готовой продукции вида i со склада в момент t;
$q_i(t)$ – интенсивность поступления готовой продукции на склад;
v_i – площадь, занимаемая одной единицей продукции вида i .

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} l_{ij} \cdot \int_0^T qi(t)dt \leq W_j + z_j,\ \ j=1,2,\dots,M \tag{33}$$

$$\sum\nolimits_{j=1}^{M} z_j \cdot \gamma_i \leq F \tag{34}$$

Где:
z_j – объем закупаемых комплектующих вида j;
γ_j – цена комплектующих вида j.
W_j – количество комплектующих вида j, которое есть на предприятии;

$$\int_0^T qi(t)dt \leq Pt_i^t\,,\ i=1,2,\dots,n \tag{35}$$

Соотношение (35) задает ограничение по спросу на выпускаемую предприятием продукцию. Задача (30) – (35) является задачей оптимального управления, решением которой является вектор-функция $q(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t))$, а также вектор закупок комплектующих $z= (z_1,\ldots, z_M)$. Аналитически точное решение задачи (30)- (35) получить довольно сложно, но в то же время может быть предложен метод получения приближенного решения этой задачи, основанный на аппроксимации функций $q_i(t)$, i=1,2,…,n кусочно- непрерывными функциями. Для этого разобьем интервал времени (0,T) на N ограниченных отрезков (t_{j-1},t_j) где j=1,2,…N. На каждом из этих отрезков будем считать, функцию $q_i(t)$ константой. Таким образом, производительность сборки продукции на отрезке времени (t_{j-1},t_j) будем обозначать q_{ij}. Тогда решение задачи (30-35) сведем к решению задачи линейного программирования следующего вида:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N} \beta_i \cdot q_{ij} \cdot \Delta_j \rightarrow \max \tag{36}$$

Где:
Δ_j – длительность отрезка;
q_{ij} – производительность сборки продукции вида j времени (t_{j-1},t_j).

$$\sum_{i=1}^{n} q_{ij} \cdot a_{il}^{0} \leq c_l\ , l=1,2,\ldots,m; j=1,2,\ldots,N \tag{37}$$

Где:
q_{ij} – производительность сборки продукции вида j времени (t_{j-1},t_j).
Соотношение (37) это ограничение на производственные мощности на каждом отрезке времени (t_{j-1},t_j) ,где j=1,2,…,N .

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \sum_{j=1}^{\tau} q_i(t) \cdot \Delta_j \leq V + \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \sum_{j=1}^{\tau} u_{ij} \cdot \Delta_j \;\; t \in (0;\, T);\; i=1,2,\ldots,n \tag{38}$$

Где:
u_{ij} – интенсивность оттока продукции вида i на интервале времени (t_{j-1},t_j)
соотношение (38) – это ограничение на объем склада, означающее, что суммарная емкость поступившей на склад продукции за вычетом суммарной емкости оттока продукции со склада на любом отрезке времени $(0,t_j)$ не должна превышать величины объема склада V.

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} \cdot \sum_{j=1}^{N} q_{ij} \cdot \Delta_j \leq W_j + z_j,\;\; j=1,2,\ldots,M \tag{39}$$

$$\sum_{j=1}^{M} z_j \cdot \gamma_i \leq F \tag{40}$$

Ограничение (39) это ограничение на возможности использования комплектующих каждого вида, а соотношение (40) по ограничение на объем оборотных средств F, направляемых на закупку комплектующих для сборочного производства.

$$\sum_{j=1}^{N} q_{ij} \cdot \Delta_j \leq Pt_i, i=1,2,\ldots,n \tag{41}$$

Таким образом, динамическая задача оптимального управления (30) – (35) сведена к решению задачи линейного программирования (36) – (41), где искомыми переменными являются производительности на сборочных операциях q_{ij} (i=1,2,…,n; j=1,2,…,M) и объемы закупок материальных ресурсов $z = (z_1, \ldots. z_m)$.

Учитывая известное утверждение о том, что любая непрерывная функция q(t) может быть как угодно точно аппроксимирована ступенчатыми (кусочно-постоянными) функциями $\theta(t)$. решение задачи линейного программирования (36) -(41) может быть использовано как квазиоптимальное решение задачи оптимального управления (30) – (35).

Анализ устойчивости и методы оценки рисков в моделях управления ограниченными ресурсами предприятия

Рассмотрим влияние фактора инфляции на решение задачи (1) – (5). Будем считать, что инфляция линейным образом оказывает воздействие на величину прибыли c_i по следующему закону:

$$c_i(\xi) = c_i(0) + n_i \cdot \xi \cdot c_i(0) \tag{42}$$

Здесь $c_i(\xi)$ – прибыль от выпуска одной единицы продукции вида i при уровне инфляции ξ в долях; $c_i(0)$ – прибыль от выпуска одной единицы продукции вида i при уровне инфляции $\xi = 0$. n_i – коэффициент увеличения прибыли от выпуска единицы продукции вида i при росте инфляции. С учетом целочисленности всех допустимых производственных программ (ограничение (5) задачи (1)-(5)) их число конечно. Пусть множество $X=\{X^1, X^2,\ldots X^N\}$ – задает все допустимые производственные программы (ПП) задачи (1) – (5) и пусть ПП $x^j = (x_1^j,\ldots,x_N^j)$ является оптимальной при $\xi = 0$. Рассмотрим множество функций:

$$F^j(\xi) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} c_i(\xi) \cdot x_i^j,\ j=1,2,\ldots,M \tag{43}$$

Иными словами, $F^j(\xi)$ – это целевая формула ПП x^j при уровне инфляции ξ. Очевидно, что $F^j(\xi)$ является линейной, так как $c_i(\xi) = c_i(0) + n_i \cdot \xi \cdot c_i(0)$ и возрастающей, так как

$$\frac{dF^j(\xi)}{d\xi} = \sum\nolimits_{i=1}^{n} n_i \cdot x_i^j \cdot c_i(0) > 0\ (j=1,2,\ldots,M) \tag{44}$$

Если выполняется соотношение

$$\frac{dF^l(\xi)}{d\xi} > \frac{dF^j(\xi)}{d\xi} (\xi=1,2,\ldots,N),\ (l \neq j) \tag{45}$$

То очевидно, что для любого уровня инфляции $\xi \in (0,\infty)$ решение x^i остается оптимальным для задачи (1)-(5). Если же существует K, для которого

$$\frac{dF^K(\xi)}{d\xi} > \frac{dF^i(\xi)}{d\xi} \tag{46}$$

То линейное уравнение $F^K(\xi) = F^i(\xi)$ имеет положительное решение ξ^K. Это, в частности означает, что при изменении инфляции на отрезке $(0, \xi^K)$ оптимальным является решение x^i, а при инфляции $\xi > \xi^K$ оптимальной будет производственная программа $x^K=(x_1^K,x_2^K,\ldots,x_n^K)$.

Предположим, что есть некоторое конечное подмножество производственных программ $X_Q \leq X$ для которых выполняется соотношение

$$\frac{dF^q(\xi)}{d\xi} > \frac{dF^i(\xi)}{d\xi},\ \forall x^q \in X_Q \tag{47}$$

Расположим все допустимые производственные программы в порядке возрастания величины

$$\frac{dF^j(\xi)}{d\xi} (\xi=1,2,\ldots,N) \tag{48}$$

Пусть как и ранее оптимальной будет ПП x^1. Тогда для всех j>1 будет выполняться соотношение

$$\frac{dF^j(\xi)}{d\xi} > \frac{dF^l(\xi)}{d\xi}\ j= l+1,\ldots,N \tag{49}$$

Решим N-1 уравнений вида $F^j(\xi) = F^l(\xi)$, j=l+1, …, N. Пусть это будут решения ξ^j(j=1,2,…, N). Определим $\xi^m=\min \xi^j$, j=l+1, …, N. очевидно, что при $\xi > \xi^m$ оптимальной становится ПП $x^m=(x_1^m,\ldots,x_n^m)(m>1)$. Далее решаем уравнение $F^j(\xi) = F^m(\xi)$, j=m+1, …, N и определяем $\xi^{m1}=\min \xi^j$, j=m^1, …, N. Таким образом, при $\xi > \xi^{m1}$ оптимальной становится ПП x^{m1}.

Учитывая конечность множества X_Q, а также тот факт, что $\frac{dF^j(\xi)}{d\xi} > \frac{dF^{j+1}(\xi)}{d\xi}$, j=l+1, …, N-1, получим следующее утверждение.

Утверждение 1.

При изменении инфляции ξ на интервале $(0;\infty)$, этот интервал может быть разбит на конечное число отрезков $\Delta_0, \ldots, \Delta_M$ $(M \leq N-1)$ таким образом, что при любых значениях инфляции на отрезке Δ_K оптимальным остается одно и то же решение x^K $(K=1,2,\ldots, N-1)$.

Содержательный смысл утверждения 1 позволяет оценивать риск оптимальности любой производственной программы из множества X_Q. Для этого путем экспертных оценок или путем анализа существующей статистики определяется P_j, как вероятность того, что инфляция на периоде $(0;T)$ будет находиться в рамках отрезка Δ_j $(j= 1,2,\ldots, N-1)$

Тогда, выбирая в качестве оптимального решения xj решение, получим, что вероятность его неоптимальности j равна:

$$\theta_j = 1 - \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^{N-i} P_{\xi m} \tag{50}$$

Величину θ_j можно использовать кик количественную оценку риски неоптимальности решения x^j. Рассмотрим пример использования изложенных выше теоретических положений. Пусть задача (1)- (5) имеет два допустимых решения $x^1 = (3,4)$ и $x^2 = (4,3)$. Соответственно, прибыль от реализации единицы продукции вида i $c_1(0) = 5$, $c2(0) = 6$ при уровне $\xi = 0$. Значения коэффициентов n_1 и n_2 в формуле (42) равны соответственно $n_1 = 2$ и $n_2 = 1$. Определим значение нелепой функции $F^1(0)$ и $F^2(0)$:

$$F^1(0) = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 39$$
$$F^2(0) = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 38$$

Таким образом, при уровне инфляции $\xi = 0$, оптимальной является ПП $x^1 = (3,4)$. Определим $\frac{dF^1(\xi)}{d\xi}$ и $\frac{dF^2(\xi)}{d\xi}$:

$$\frac{dF^1(\xi)}{d\xi} = \frac{d\,(3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot \xi \cdot 2 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 6 \cdot \xi \cdot 1)}{d\xi} = 30 + 24 = 54$$

$$\frac{dF^2(\xi)}{d\xi} = \frac{d\,(4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot \xi \cdot 2 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 6 \cdot \xi \cdot 1)}{d\xi} = 40 + 18 = 58$$

Учитывая, что $\frac{dF^2(\xi)}{d\xi} > \frac{dF^1(\xi)}{d\xi}$, получим, что существует уровень инфляции $\xi > 0$, при котором происходит переход оптимальности с ПП x^1 па ПП x^2, Для вычисления этого ξ решим следующее уравнение $F^1(\xi)= F^2(\xi)$.

Раскрывая значения $F^1(\xi)$ и $F^2(\xi)$, получим:

$$3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot \xi \cdot 2 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 6 \cdot \xi \cdot 1 = 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot \xi \cdot 2 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 6 \cdot \xi \cdot 1,$$

откуда $\xi = \frac{1}{4}$. Таким образом, при уровне инфляции $\xi = \frac{1}{4}$ (25%) оптимальной будет ПП x^2 (4,3), а при уровне инфляции

$\xi \in (0,\frac{1}{4})$ оптимальной будет ПП x^2 (3,4), Оценивая вероятность того, что в течение одного года (период (0,T) инфляция превысит величину 25% как 0,1, оцениваем риск неоптимальности программы x^2, используя формулу (50):

$\theta^2 = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

Соответственно, риск неоптимальности программы x^1 будет равен

$\theta^2 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

Следовательно, в данном примере если в качестве критерия использовать риск неоптимальности производственной программы,, предпочтительнее будет ПП $x^1 = (3,4)$.

При росте накопленной будут расти в абсолютном выражении не только $c_i(\xi)$, но и цены на комплектующие β_j. Рассмотрим влияние этого роста на оптимальность ПП задачи (6-

11). Будем полагать, что рост цен на комплектующие также будет линейным относительно ξ и, следовательно: $\beta_j(\xi) = \beta_j(0) + m_j \cdot \beta_j \cdot \xi$, ($j = 1,\ldots,M$)

Здесь $\beta_j(\xi)$ цена за единицу комплектующих вида j при уронит максимальной инфляции ξ; $\beta_j(0)$ – цена на комплектующие вида j при $\xi = 0$; ξ – уровень накопленной инфляции (в долях); m – коэффициент, отражающий интенсивность роста цен на комплектующие при величине накопленной инфляции ξ. Очевидно, что сели при уровне инфляции ξ=0, оптимальной в модели (6)-(11) является некоторая производственная программа $x^1 = (x_1^1,\ldots,x_1^N)$, то существует уровень инфляции ξ, при котором оборотных средств в объеме F (модель (6) – (11)) станет недостаточно для обеспечения производственной программы x^1 необходимым количеством комплектующих. Дни определения этого уровня инфляции необходимо решить следующее уравнение:

$$\sum\nolimits_{j=1}^{M} = 1\, z_j^i \cdot (\beta_j(0) + \beta_j(0) \cdot m_j \cdot \xi) = F \qquad (51)$$

Здесь z_j^i минимальная величина закупок вида j, необходимых для выпуска продукции в объеме $x^l = (x_1^l, \ldots, x_n^l)$. Решая уравнение (51) относительно ξ, получим

$$\xi = \frac{(F - \sum\nolimits_{j=1}^{M} z_j^i \cdot \beta_j(0))}{\sum\nolimits_{j=1}^{M} z_j^i \cdot \beta_j(0) \cdot m_j} \qquad (52)$$

Из выражения (52), в частности, следует, что если величина максимальной инфляции ξ^l будет больше величины ξ, полученной из формулы (52), то оборотных средств в объеме F будет недостаточно для обеспечения производственной программы $x^l = (x_1^l, \ldots, x_n^l)$ комплектующими в необходимом количестве. Следовательно, необходимо сокращать объемы выпуска продукции.

С учетом проведенного анализа при росте накопленной инфляции ξ возможны, переходы от одной оптимальной производственной программы к другой. Это происходит по двум причинам:

- допустимые ПП, обеспечивающие более высокий темп роста прибыли при увеличении накопленной инфляции
- Из-за ограниченности оборотных средств необходимо снижать объемы выпуска продукции, так как при определенных уровнях инфляции финансовых ресурсов недостаточно для обеспечения материальными ресурсами выбранной ПП.

Модель управления оборотными средствами группы предприятий, выпускающих однородную продукцию

Рассмотрим ситуацию, когда необходимо решить проблему оптимизации производственной программы нескольких предприятий в условиях ограничений на производственные мощности, объем оборотных средств, направленных на закупку комплектующих, объем склада, на котором хранятся комплектующие, а также объем спроса по каждому виду выпускаемой продукции. Как и ранее, в качестве критерия оптимальности будем использовать суммарную прибыль всех предприятий.

$$\sum\nolimits_{j=1}^{M} \sum\nolimits_{i=1}^{n} x_{ij} \cdot c_{ij} \rightarrow \max \qquad (53)$$

x_{ij} – объем продукции вида i, выпускающейся предприятием j, M – число предприятий; n – число видов продукции; c_{ij} – маржинальный доход от производства единицы продукции вида i предприятием j.

ОГРАНИЧЕНИЕ ПО МОЩНОСТИ:

$$\sum\nolimits_{i=1}^{M} x_{ij} \cdot t_{il} \leq Q_{li},\ l = 1, 2, \ldots, K;\ j = 1, 2, \ldots, M \qquad (54)$$

$\sum\nolimits_{i=1}^{M} x_{ij} \cdot t_{il}$ ограничение на производственные мощности предприятия j, x_{ij}- объем продукции i, выпускаемой предприятием j; l – число видов оборудования, участвующих в выпуске продукции вида i; Q_{ij} – лимит эффективного времени оборудования вида 1 на предприятии j; t_{il} – время работы оборудования вида 1 при выпуске одной единицы продукции вида i.

ОГРАНИЧЕНИЕ ПО ЕМКОСТИ СКЛАДА

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot x_{ij} \leq W_j,\ j = 1, 2, \ldots, M \qquad (55)$$

v_i – площадь склада, занимаемая одними наборами комплектующих для единицы продукции вида i;
W_j – емкость склада для хранения комплектующих на предприятии вида j.

ОГРАНИЧЕНИЕ ПО ОБЪЕМУ ЗАКУПАЕМЫХ КОМПЛЕКТУЮЩИХ НА КАЖДОМ ПРЕДПРИЯТИИ

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \cdot l_{iq} \leq z_{qj},\ j = 1, 2, \ldots, M;\ q = 1, 2, \ldots, L$$

Здесь z_{qj} – количество комплектующих вида q, закупаемых предприятием с номером j, b – число видов комплектующих. l_{iq} – количество комплектующих вида q, необходимых для сборки одной единицы продукции вида i.

ОГРАНИЧЕНИЕ НА ОБЪЕМ ОБОРОТНЫХ СРЕДСТВ

$$\sum_{q=1}^{\Delta} z_{qj} \cdot \beta_q \leq F_j,\ j = 1, 2, \ldots, M \qquad (57)$$

Здесь β_q – цена одною комплектующего вида q; Fj – объем оборотных средств на предприятии с номером j.

ОГРАНИЧЕНИЕ НА СПРОС

$$\sum_{j=1}^{M} x_{ij} \leq Pt_i,\ i = 1, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, M;\ x \in Z^{+}$$

Здесь *Pti* – спрос на продукцию вида i.

Модель управления оборотным капиталом предприятия с учетом привлечения кредитных ресурсов

Рассмотрим обобщение предыдущей модели, когда возможно привлечение кредита для дополнительной закупки комплектующих и аренды дополнительных складских площадей для хранения комплектующих. Далее будем полагать, что кредит для дополнительной закупки комплектующих привлекается под процент a_1 (в долях), а кредит для дополнительной аренды дополнительной аренды складских помещений под процент a_2 (в долях). Чтобы принять решение об использовании запасных средств необходимо рассчитать следующие ситуации:

- Кредит не привлекается;
- Кредит привлекается только для дополнительной закупки комплектующих;
- Кредит привлекается только для дополнительной аренды складов;
- Кредит привлекается и для дополнительной закупки комплектующих, и для дополнительной аренды складов.

Ниже будет рассмотрена ситуация, для одного предприятия, которая дальнейшем может быть обобщена и на случай с несколькими предприятиями.

Таким образом, для того, чтобы выбрать решения А), Б), В) или Г) необходимо определить значение прибыли предприятия для каждого из перечисленных решений. Оценку прибыли в ситуации без привлечения кредита дает решение задачи (53) – (58). Назовем эту задачу задачей 1. Оптимизационная задача 2 соответствует пункту Б) (кредит привлекается для дополнительной закупки комплектующих). Дадим математическую постановку этой задачи (рассмотрим одно предприятие).

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \cdot c_{ij} - a_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^{\Delta} z_q \cdot \beta_q - F\right) \to \max \qquad (53.2)$$

Здесь величина $a_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^{\Delta} z_q \cdot \beta_q - F\right)$ – дополнительные затраты, связанные с привлечением кредита для закупки комплектующих.

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} \cdot t_i \leq \theta_l,\ l = 1, 2, \ldots, K \qquad (54.2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot x_i \leq W \qquad (55.2)$$

Здесь W – емкость склада для хранения комплектующих.

$$\sum_{i=1}^{n} l_{iq} \cdot x_i \leq z_q,\ q = 1, 2, \ldots, L \qquad (56.2)$$

$$\sum_{j=1}^{M} z_q \cdot \beta_q \leq F + V^1_{кр} \qquad (57.2.0)$$

Здесь $V^1_{кр}$ объем кредита, который может быть привлечен для дополнительной закупки комплектующих ; F – объем оборотных средств в предприятии.

$$\sum_{j=1}^{M} z_q \cdot \beta_q > F \qquad (57.2.1\ )$$

Ограничения (57.2.0) и (57.2.1) говорят о том, что кредит для дополнительной закупки комплектующих обязательно должен быть привлечен.

$$x_i \leq Pt_i,\ x_i \in Z^+,\ \ i = 1, 2, \ldots, n \qquad (58.2)$$

Рассмотрим задачу 3, которая соответствует ситуации привлечения кредита только для дополнительной аренды склада для комплектующих. (пункт В))

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \cdot c_{ij} - a_2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{\Delta} v_i \cdot x_i - W\right) \cdot \gamma \rightarrow \max \qquad (53.3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} \cdot x_i \leq \theta_l,\ l = 1, 2, \ldots, K \qquad (54.3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot x_i \leq W + \Delta \qquad (55.3.0)$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot x_i > W \qquad (55.3.1)$$

$$\Delta \cdot \gamma < V^2_{кр} \qquad (55.3.2)$$

Ограничения (55.3.0). (55.3.1) и (55.3.2) гарантируют привлечение средств в объеме не более $V^2_{кр}$ для дополнительной аренды склада; Δ – дополнительная арендованная площадь склада; γ – стоимость аренды одного квадратного метра склада.

$$\sum_{i=1}^{n} l_{iq} \cdot x_i \leq z_q,\ q = 1, 2, \ldots, L \qquad (56.3)$$

$$\sum_{j=1}^{M} z_q \cdot \beta_q \leq F \qquad (57.2.0)$$

$$x_i \leq Pt_i,\ x_i \in Z^+,\ \ i = 1, 2, \ldots, n \qquad (54.4)$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot x_i \leq W + \Delta \qquad (55.4.0)$$

Решение задачи 3 даст оптимальную прибыль в условиях привлечения кредита только для дополнительной аренды складских помещений для хранения комплектующих.

Для того, чтобы определить максимальную прибыль в условиях привлечения кредита и для дополнительной закупки комплектующих, и для аренды дополнительной площади склада, решим задачу 4 следующего вида:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \cdot c_{ij} - a_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^{\Delta} z_q \cdot \beta_q - F\right) - a_2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{\Delta} v_i \cdot x_i - W\right) \cdot \gamma \rightarrow \max \qquad (53.4)$$

В целевой функции (53.4) учитываются как дополнительные затраты, связанные с обслуживанием кредита, привлеченного для закупки материальных ресурсов производства, так и затраты на аренду дополнительной площади склада.

При этом полагается, что затраты на хранение комплектующих для выпускаемой продукции входят в переменные затраты.

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} \cdot x_i \leq \theta_l, l = 1, 2, \ldots, K \qquad (54.4)$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot x_i > W \qquad (54.4.1)$$

$$\Delta \cdot \gamma < V^2_{кр} \qquad (54.4.2)$$

Здесь $V^2_{кр}$ – кредит, выделяемый на аренду дополнительных складских площадей

$$\sum_{i=1}^{n} l_{iq} \cdot x_i \leq z_q, q = 1, 2, \ldots, L \qquad (56.4)$$

$$\sum_{j=1}^{M} z_q \cdot \beta_q \leq F + V^1_{кр} \qquad (57.4.0)$$

$$\sum_{j=1}^{M} z_q \cdot \beta_q > F \qquad (57.4.1)$$

Здесь $V^1_{кр}$ объем кредита, который может быть привлечен для дополнительной закупки комплектующих ; F – объем оборотных средств в предприятии.

$$x_i \leq Pt_i, x_i \in Z^+, \; i = 1, 2, \ldots, n \qquad (58.2)$$

Модель управления финансовыми ресурсами предприятия в ситуации, когда производственная программа формируется с учетом заказа

Вернемся к модели (53) – (58), когда определяется производственная программа группы предприятий с учетом заказа на выпускаемую продукцию. Наличие заказа означает, что данный вид продукции должен выпускаться в объеме не менее заданного. Таким образом, рассмотрим ситуацию, когда вместе с ограничениями (54) – (58) должно еще выполняться ограничение на заказ вида

$$x_i \geq zak_{ij}, x_i \in Z^+, \; i = 1, 2, \ldots, n, \; j = 1, 2, \ldots, M \qquad (58^*)$$

Обратим внимание на тот факт, что если хотя бы по одному виду продукции и хотя бы для одного из предприятий

$zak > 0$, то задача (53) – (58), (58*) не всегда имеет решение вследствие одной из причин:

- Недостаточна производственная мощность предприятия;
- Недостаточна емкость склада для хранения комплектующих;
- Недостаточно финансовых ресурсов для закупки комплектующих.

Чтобы устранить перечисленные причины, необходимо дополнительное финансирование предприятия, объем которою может быть определен следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{K} \gamma_{ij} \cdot \gamma_i + \sum_{j=1}^{M} V^j_{об} + \sum_{j=1}^{M} \Delta_j \cdot Q_i \to \min \qquad (59)$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{ij} \cdot x_i \leq \tau_l \cdot (K_{ij} + \gamma_{ij}), j = 1, 2, \ldots, M, l = 1, 2, \ldots, K \qquad (60)$$

Здесь K_{ij} – количество оборудования вида l которое есть у предприятия j; γ_{ij} – количество единиц дополнительно закупаемого оборудования на предприятии j; Δ_j – дополнительные площади складов, которые необходимы предприятию j, чтобы выполнить заказ; $V^j_{об}$ – дополнительные оборотные средства, которые необходимы для закупки комплектующих на предприятии); Q_j – стоимость дополнительной аренды склада для предприятия j.

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot x_{ij} \leq W_j + \Delta_j, j = 1, 2, \ldots, M \qquad (61)$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_{iq} \cdot x_{ij} \leq z_{qj},\ q = 1, 2, \ldots, L;\ j = 1, 2, \ldots, M \qquad (62)$$

$$\sum_{j=1}^{M} z_{qj} \cdot \beta_q \leq F_j + V_{об}^{j};\ j = 1, 2, \ldots, M \qquad (63)$$

$$x_i \leq Pt_i,\ x_i \in Z^+,\ \ i = 1, 2, \ldots, n \qquad (64)$$

$$x_i \geq zak_{ij},\ x_i \in Z^+,\ \ i = 1, 2, \ldots, n,\ \ j = 1, 2, \ldots, M \qquad (65)$$

Решение задачи (59) – (65) даст объем необходимых инвестиций для выполнения заказа по выпускаемой продукции, если изначально модель (53) – (58), (58*) не имела решения.

Динамическая модель управления оборотным капиталом предприятия

Рассмотрим ситуацию, когда оборотные средства, направляемые на закупку материальных ресурсов поступают с интенсивностью f(t) на периоде планирования (0,T). Объем поступивших оборотных средств F на периоде (0,T) определяется, таким образом, по формуле:

$$F = \int_0^T f(t)\, dt \qquad (66)$$

Обозначим интенсивность выпуска продукции вида i как x_i (t), а интенсивность закупки материальных ресурсов вида j через z_j (t) ($i = 1, \ldots, n,\ \ j = 1, 2, \ldots, M$)

В этом случае задачу оптимального распределения оборотных средств, направленных на закупку материальных ресурсов производства, можно сформулировать таким образом:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \int_0^T x_i\,(t)dt \to \max \qquad (67)$$

Целевая функция (67) задет маржинальный доход от реализации выпущенной продукции в объеме $\int_0^T x_i(t)$. Здесь $c_i = a_i - b_i$, где a_i – цена реализации продукции вида i; b_i – переменные затраты при выпуске одной единицы продукции вида i.

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} \int_0^T x_i\,(t')dt' \leq L_j + \int_0^T z_j\,(t')dt',\ j = 1, 2, \ldots, M;\ \forall t \in (0,T) \qquad (68)$$

Ограничение (68) свидетельствует о том, что на любом временном интервале (0,T) нельзя использовать материальные ресурсы в объемах больших, чем они были закуплены, с учетом существующих запасов на момент времени t=0.

$$\sum_{i=1}^{n} t_{ij} \int_{t_1}^{t_2} x_i\,(t')dt' \leq \left(\frac{t_2 - t_1}{T}\right) K_i \tau_i,\ l = 1, 2, \ldots, K;\ t_2 > t_1;\ \forall t_1,\ t_2 \in (0,T) \qquad (69)$$

Неравенство (69) задает ограничения на равномерную загрузку оборудования в течение всего периода (0,T).

$$\sum_{j=1}^{M} \beta_j \int_0^t z_j\,(t')dt' \leq \int_0^t f(t')dt' \qquad (70)$$

Ограничение (70) говорит о том, что нельзя потратить финансовые средства на закупку материальных ресурсов в большем объеме, чем они поступают на момент времени $t \in (0,T)$.

$$\int_0^T x_i\,(t)\, dt \leq Pt_i,\ i = 1, 2, \ldots, n \qquad (71)$$

Ограничение (71) свидетельствует о том, что нельзя выпускать продукцию в объёмах больших, чем спрос на эту продукцию. Рассмотрим приближенный метод решения задачи (67)-(71). Вначале решим статическую задачу в предположении, что оборотные средства поступают в момент t=0 в объёме F.

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i \to \max \quad (72)$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} x_i \le L_i + z_j,\ j = 1, 2, \ldots, M \quad (73)$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} \cdot x_i \le k_l \cdot \tau_l,\ l = 1, 2, \ldots, K \quad (74)$$

$$\sum_{j=1}^{M} \beta_j \cdot z_j \le F;\ x_i \le Pt_i \quad (75)$$

$$x_i \ge 0,\ z_j \ge 0 \quad (75.1)$$

Далее разбиваем интервал (0,T) на N равных отрезков. Далее для каждого отрезка времени (t_0,t_i) (i=1,2,…N) определяются объём израсходованных ресурсов и соответственно – объём дополнительных затрат на закупку материальных ресурсов zat (t_i) (i=1,2,…N) t_N=T. Рассмотрим неравенства 132923

$$zat(ti) \le \int_0^{t_i} f(t)\,dt,\ i = 1, 2, \ldots, N \quad (76)$$

Если неравенства (76) выполняются для всех i=1,2,…,N, то решения задачи (67)-(71) и задачи (72)-(75.1) совпадают. Если неравенства (76) не выполняются, то начиная с некоторого момента t_j $(1 \le j \le N)$(решаются следующие задачи:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i^{\theta} \to \max \quad (77)$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} \cdot x_i^{\theta} \le L_j + z_j^{\theta} \quad (78)$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} \cdot x_i^{\theta} \le k_l \cdot \tau_l\ \ l = 1, 2, \ldots, K \quad (79)$$

$$\sum_{j=1}^{M} \beta_j \cdot z_i^{\theta} \le \int_0^{t^{\theta}} f(t)\,dt,\ \theta = j, j, +1, \ldots, N \quad (80)$$

$$x_i^{\theta} \le Pt_i - \sum_{P=1}^{\theta-1} x_i^{p};\ x_i \ge 0;\ \theta = j, j, +1, \ldots, N \quad (81)$$

Окончательное решение $x=(x_1,\ldots, x_n)$ формируется из решения задач (77)-(81) следующим образом:

$$x_i = \tilde{x}_i + \sum_{\theta=j}^{N} x_i^{\theta}$$

Здесь $\tilde{x}_i = \int_0^{t_i} x_i(t)\,dt$ – это решение задачи (67)-(71) для интервала времени $(0,t_j)$ в условиях, когда весь объем финансов, направляемых на закупку материальных ресурсов производства поступает в момент времени t=0.

Интенсивность поступления финансовых ресурсов f(t) может быть задана как случайный процесс, т.е.

$$f_j(t) = \begin{cases} f_1(t) - P_1 \\ \vdots \\ f_m(t) - P_m \end{cases}$$

Здесь $f_j(t)$ – это реализация случайного процесса с дискретно распределенными вероятностями P_j (j=1,2,…,m)

В этой ситуации при выборе той или иной производственной программы $x(t)=(x_1(t),\ldots, x_n(t))$ необходимо учитывать не только значение целевой функции (67), задающей доходность производственной программы, но и риски, связанные с ее использованием.

Рассмотрим оптимальные производственные программы задачи (67)-(71) $x^1(t),\ldots, x^m(t)$, каждая из которых оптимальна при соответствующих интенсивностях финансовых потоков $f_1(t),\ldots, f_m(t)$. Здесь $x^1(t) = (x_1^1(t),\ldots, x_n^1(t))$.

Обозначим через $\bar{D}_j$ те реализации случайного процесса f(t), для которых производственная программа $x^j(t)$ не является допустимой. Тогда риск допустимости $R_g(x^j(t))$ определяется следующим образом:

$$R_g(x^j(t)) = \sum_{l \in \bar{D}_j} P_l$$

Легко видеть, что всегда $R_g(x^j(t)) < 1$, так как при интенсивности $f_j(t)$ производственная программа $x^j(t) = (x^j_1(t),..., x^j_n)$ не только допустима, но и оптимальна.

Пример

Рассмотрим задачу оптимального управления инвестициями в оборотный капитал предприятия, производящего снеки. В рассматриваемом примере у предприятия есть возможность привлекать дополнительные финансовые ресурсы путем кредитования, а также, при необходимости, арендовать дополнительные складские площади. Таким образом, формулировка задачи соответствует модели 6. На основе исходных данных вычисляются два оптимальных решения: для случая, когда кредит не привлекается и случая использования заемных средств. Наилучшим из них признается то, которое обеспечивает наибольшее значение целевой функции.

В таблице 1 представлены исходные данные задачи: доступный капитал (руб.), процентная ставка, максимально доступный объем денежных средств для кредита (руб.), площадь склада (м²), ставка аренды (руб/м²), а также максимально допустимая для аренды дополнительная площадь (м²).

В таблице 2 представлена необходимая информация о продукции, а именно, наименования (всего 9 позиций), отпускная цена (руб.), вес одной упаковки (г.), объем спроса (тыс. уп./мес.), штрафы за недопоставки (руб.).

Таблица 1

Исходные данные для решения задачи

Показатель	Условное обозначение	Значение
Доступный капитал	F	300000
Процентная ставка по кредиту	α	0,15
Максимально доступный объем денежных средств для кредита	$F_{кр}$	600000
Площадь склада	V	65000
Ставка аренды	d	10
Максимально допустимая для аренды дополнительная площадь	y	35000

В таблице 3 представлены данные о типах оборудования, количестве линий, эффективном времени, а также нормы загрузки оборудования единицей продукции каждого вида.

Таблица 4 демонстрирует данные о сырье, требуемом для производства продукции каждого вида. В предпоследнем столбце рассчитаны значения дополнительной закупки

Таблица 2

Данные о продукции

№	Наименование продукции	Ед.	Отпускная цена (руб.)	Вес уп. (г.)	Объем спроса на продукцию, тыс.уп./мес.	Штраф за недопоставку
1	Снеки сухарики	Уп.	96	480	4270	14
2	Снеки багет	Уп.	324	720	5400	10
3	Снеки к пенному	Уп.	156	600	5940	15
4	Снеки крекеры	Уп.	408	1080	3350	14
5	Снеки кукурузные 85г.	Уп.	456	1020	4700	11
6	Снеки картофельные 35 г.	Уп.	144	420	9500	21
7	Снеки картофельные 80 г.	Уп.	420	960	10350	25
8	Снеки картофельные 150 г.	Уп.	720	1800	11920	20
9	Снеки картофельные 20 г.	Уп.	756	2400	10140	23

Таблица 3

Данные об оборудовании

№	Наименование оборудования	Наименование продукции	Норма времени загрузки оборудования (час)	Количество линий	Время, в течение которого оборудование может быть задействовано
1	Мойка для картофеля	Снеки картофельные 35 г.	0,1	12	450
		Снеки картофельные 80 г.	0,1		
		Снеки картофельные 150 г.	0,1		
		Снеки картофельные 200 г.	0,1		
2	Чистка картофеля	Снеки картофельные 35 г.	0,1	13	450
		Снеки картофельные 80 г.	0,1		
		Снеки картофельные 150 г.	0,1		
		Снеки картофельные 200 г.	0,1		
3	Слайсер	Снеки картофельные 35 г.	0,2	19	450
		Снеки картофельные 80 г.	0,2		
		Снеки картофельные 150 г.	0,2		
		Снеки картофельные 200 г.	0,2		
4	Печка для картофеля	Снеки картофельные 35 г.	0,1	14	450
		Снеки картофельные 80 г.	0,1		
		Снеки картофельные 150 г.	0,1		
		Снеки картофельные 200 г.	0,1		
5	Смеситель для картофеля	Снеки картофельные 35 г.	0,2	20	450
		Снеки картофельные 80 г.	0,2		
		Снеки картофельные 150 г.	0,2		
		Снеки картофельные 200 г.	0,2		
6	Экструдер	Снеки сухарики	0,2	21	450
		Снеки багет	0,2		
		Снеки к пенному	0,2		
		Снеки крекеры	0,2		
		Снеки кукурузные 85г.	0,2		
7	Смеситель для экструдера	Снеки сухарики	0,4	42	450
		Снеки багет	0,4		
		Снеки к пенному	0,4		
		Снеки крекеры	0,4		
		Снеки кукурузные 85г.	0,4		

сырья каждого вида (г.),а в последнем – эти объемы закупок сырья разбиты по товарам пропорционально объёму спроса на них.

Решение данной оптимизационной задачи приводит к результатам, представленным в таблицах 5 и 6. Как можно видеть из представленных результатов, оптимальным решением является привлечение кредита в размере 590 468 рублей и аренда дополнительных 12632 м2 складских площадей. Это позволит увеличить значение целевой функции на 19%, а также ликвидировать штрафы за недопоставки за счет удовлетворения спроса в 100% объёме.

Таким образом, привлечение кредита в данной ситуации является целесообразным, повышая выручку и процент удовлетворения спроса на готовую продукцию.

Таблица 4

Данные о сырье

№	Наименование продукции	Наименование сырья	Цена закупки ресурса (руб./кг.)	Расход сырья (г.)	Постоянные затраты (руб.)	Запас сырья (г.)	Доп. закупка сырья (г.)	Доп. закупка сырья (г.)	Доп. закупка по каждому виду сырья для каждого товара (г.)
1	Снеки сухарики	Мука ржаная	21	485	53400	1231470	5157860	5157860	2277565,895
2		Приправа сухарики	2	1		10030,77	-5761	0	
3	Снеки к пенному	Мука ржаная	21	727	56100	1231470	5157860	5157860	2880294,105
4		Приправа к пенному	4	4		33810,7	-10051	0	0
5	Снеки багет	Мука пшеничная	27	620	56500	166787,72	6842762	6842762,28	2619800,416
6		Приправа багет	4	7		34198,1	3602	3601,9	3601,9
7	Снеки багет	Мука пшеничная	27	1093	65600	166787,72	6842762	6842762,28	2619800,416
8		Приправа крекеры	5	9		21912	8238	8238	8238
9	Снеки кукурузные, 85 г.	Мука кукурузная	28	1024	63100	629184,4	4183616	4183615,6	4183615,6
10		Приправа кукурузная	5	3		24207,26	-10107	0	0
11	Снеки картофельные 35 г.	Картофель	13	450	9300	8809040,8	3504719	3504719,2	794436,4686
12		Приправа картофельная	3	3		163597,2	284973	284972,8	64596,55452
13	Снеки картофельные 80 г.	Картофель	13	1022	24000	8809040,8	3504719	3504719,2	865517,6263
14		Приправа картофельная	3	7		163597,2	284973	284972,8	865517,6263
15	Снеки картофельные 150 г.	Картофель	13	2003	41100	8809040,8	3504719	3504719,2	996808,7059
16		Приправа картофельная	3	13		163597,2	284973	284972,8	996808,7059
17	Снеки картофельные 200 г.	Картофель	13	2605	69600	8809040,8	3504719	3504719,2	847956,3991
18		Приправа картофельная	3	19		163597,2	284973	284972,8	847956,3991

Таблица 5

Результаты оптимизации

	Целевая функция, руб	Доп. площадь аренды склада, м²	Сумма привлеченного кредита, руб.	Процент удовлетворения спроса	Сумма штрафов, руб.
Без привлечения кредита	23854051	0	0	83%	219881
С привлечением кредита	28470830	12632	590468	100%	0
Абсолютное изменения	4616779	12632	590468	0,17	-219881
Относительное изменение	19%	–	–	20%	-100%

Таблица 6

Процент удовлетворения спроса на продукцию

№	Наименование продукции	Спрос, тыс. упаковок/мес.	Без кредита		С кредитом	
			Выпуск, шт.	Процент удовлетворения спроса	Выпуск, шт.	Процент удовлетворения спроса
1	Снеки сухарики	4270	2848	67%	4270	100%
2	Снеки багет	5400	4881	90%	5400	100%
3	Снеки к пенному	5940	3960	67%	5940	100%
4	Снеки крекеры	3350	2234	67%	3350	100%
5	Снеки кукурузные 85г.	4700	3861	82%	4700	100%
6	Снеки картофельные 35 г.	9500	6336	67%	9500	100%
7	Снеки картофельные 80 г.	10350	10350	100%	10350	100%
8	Снеки картофельные 150 г.	11920	9475	79%	11920	100%
9	Снеки картофельные 200 г.	10140	9058	89%	10140	100%

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в работе модели представляют собой формализованное описание задачи поиска оптимального плана производства с учетом состояния экономических и финансовых ресурсов производственной компании (группы компаний), а также фактора времени. Приведена методология анализа оптимальности решения в условиях неопределенности, где в качестве стохастической величины присутствует инфляция. Рассмотренный пример иллюстрирует возможность применения моделей в практике принятия управленческих решений.

ЛИТЕРАТУРА

Данилин, В.И. (2004), *Финансовое и операционное планирование корпорации,* Дело, Москва, Россия

Мищенко, А.В. и Виноградова, Е.В. (2015), *Оптимизационные модели управления финансовыми ресурсами предприятия,* ИНФРА-М, Москва, Россия

Сергеев, В.И., Будрина, Е.В., Домнина, С.В., Дыбская, В.В. и др. (2013), *Корпоративная логистика в вопросах и ответах,* Под общ. и науч. ред. В.И.Сергеева, 2-е изд., ИНФРА-М, Москва, Россия

REFERENCES

Danilin, V.I. (2004), *Finansovoe i operacionnoe planirovanie korporacii* [Corporation Financial and Operational Planning], Delo, Moscow, Russia

Mishchenko, A.V. and Vinogradova, E.V. (2015), *Optimizacionnye modeli upravleniya finansovymi resursami predpriyatiya* [Optimization model of enterprises financial resources management] , Moscow, Russia

Sergeev, V.I., Budrina, E.V., Domnina, S.V., Dybskaya, V.V. et al. (2013), *Korporativnaya logistika v voprosah i otvetah* [Corporate logistics in questions and answers], in Sergeev, V.I. (ed.), 2nd ed., INFRA-M, Moscow, Russia

Статья подготовлена при финансовой поддержке фонда РФФИ, проект № 16-06-0043а.